

# コンパクト生成位相空間の定義、特徴付け、およびその証明

コンパクト生成位相空間 (Compactly generated topological space) (あるいは  $k$ 空間 ( $k$ -space)) は、代数的位相幾何学や圏論的位相幾何学において、関数空間や積空間を心地よく扱う (デカルト閉圏を構成する) ために導入される、極めて重要な空間のクラスです。

以下に、その厳密な定義、3つの強力な特徴付け、およびそれらの詳細な証明をまとめます。なお、便宜上、位相空間  $X$  に対し、コンパクトハウスドルフ空間  $K$  からの連続写像  $g: K \rightarrow X$  全体の集合を  $\mathcal{C}(X)$  と表記します。

## 1. コンパクト生成位相空間の定義

位相空間  $X$  がコンパクト生成であるとは、その位相 (開集合や閉集合) が「コンパクトハウスドルフ空間からの引き戻し」によって完全に決定されていることを指します。

### 【定義】

位相空間  $X$  の部分集合  $A \subset X$  が「 $k$ 閉集合」であるとは、任意のコンパクトハウスドルフ空間  $K$  と任意の連続写像  $g: K \rightarrow X$  に対し、 $g^{-1}(A)$  が  $K$  の閉集合となること (すなわち任意の  $g \in \mathcal{C}(X)$  に対して  $g^{-1}(A)$  が閉) をいう。

空間  $X$  がコンパクト生成位相空間であるとは、「任意の  $k$ 閉集合は、元の位相における閉集合である」が成り立つ空間のことをいう。

\* 連続写像による閉集合の逆像は常に閉集合であるため、「通常閉集合  $\implies k$ 閉集合」は常に自明に成り立ちます。したがって、コンパクト生成空間とは「通常閉集合」と「 $k$ 閉集合」が完全に一致する空間のことです (開集合で定義しても同値です)。

## 2. 有用な特徴付け (同値な条件) と詳細な証明

### 特徴付け ①: 写像の連続性による特徴付け

### 【定理】

位相空間  $X$  がコンパクト生成空間、 $Y$  を任意の位相空間とする。写像  $f: X \rightarrow Y$  が連続であるための必要十分条件は、任意のコンパクトハウスドルフ空間  $K$  と任意の連続写像  $g: K \rightarrow X$  に対し、合成写像  $f \circ g: K \rightarrow Y$  が連続となることである。

### 【特徴付け ① の詳細な証明】

( $\Rightarrow$ ) の証明 :

$f: X \rightarrow Y$  が連続であると仮定します。このとき、任意の  $g \in \mathcal{C}(X)$  (すなわち連続写像  $g: K \rightarrow X$ ) に対して、連続写像の合成  $f \circ g: K \rightarrow Y$  も連続写像の一般的な性質から当然連続となります。

( $\Leftarrow$ ) の証明 :

任意の  $g \in \mathcal{C}(X)$  に対して  $f \circ g: K \rightarrow Y$  が連続であると仮定します。 $f$  が  $X$  上で連続であることを示すために、 $Y$  の任意の閉集合  $B$  を取ります。このとき、逆像  $A = f^{-1}(B)$  が  $X$  の閉集合であることを示せば十分です。

$X$  はコンパクト生成空間であるため、 $A$  が「 $k$ 閉集合」であることを示せば、元の位相でも閉集合であることが従います。そこで、任意の  $g \in \mathcal{C}(X)$  ( $g: K \rightarrow X$ ) を取ると、集合の基本性質より以下が成り立ちます :

$$g^{-1}(A) = g^{-1}(f^{-1}(B)) = (f \circ g)^{-1}(B)$$

仮定より合成写像  $f \circ g$  は連続であり、 $B$  は  $Y$  の閉集合なので、 $(f \circ g)^{-1}(B)$  は  $K$  の閉集合です。

したがって、任意の  $g \in \mathcal{C}(X)$  に対して  $g^{-1}(A)$  は  $K$  の閉集合となるため、 $A$  は  $k$ 閉集合の定義を満たします。 $X$  はコンパクト生成空間なので、 $A = f^{-1}(B)$  は  $X$  の通常の位相における閉集合となります。ゆえに  $f$  は連続です。 ■

## 特徴付け ② : $k$ 化 ( $k$ -ification) による特徴付け

### 【定理】

任意の位相空間  $(X, \mathcal{T})$  に対し、補集合が  $k$ 閉集合である集合 ( $k$ 開集合) の全体を  $\mathcal{T}_k$  とする。このとき  $\mathcal{T}_k$  は  $X$  上の位相を定め、この位相空間を  $kX$  と書く。このとき、

**$X$  がコンパクト生成空間である  $\iff \mathcal{T} = \mathcal{T}_k$  (すなわち  $X = kX$ )**

が成り立つ。

### 【特徴付け ② の詳細な証明】

まず、 $\mathcal{T}_k$  が位相の公理 (閉集合の条件) を満たすことを確認します。

- 空集合と全体集合 :** 任意の  $g \in \mathcal{C}(X)$  に対して  $g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  であり、 $g^{-1}(X) = K$  です。これらはコンパクトハウスドルフ空間  $K$  の閉集合なので、 $\emptyset, X$  はともに  $k$ 閉集合です。
- 任意の共通部分 :**  $k$ 閉集合の任意の族  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  に対し、その共通部分を考えると、

$$g^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} g^{-1}(A_\lambda)$$

となります。各  $g^{-1}(A_\lambda)$  は  $K$  の閉集合であり、閉集合の任意の共通部分は閉集合なので、これも  $K$  の閉集合で

す。よって共通部分も  $k$ 閉集合です。

3. **有限個の和集合**：有限個の  $k$ 閉集合  $A_1, A_2, \dots, A_n$  に対し、その和集合を考えると、

$$g^{-1} \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n g^{-1}(A_i)$$

となります。閉集合の有限和は閉集合なので、これも  $K$  の閉集合です。よって有限和も  $k$ 閉集合です。

以上から  $\mathcal{T}_k$  は位相を定めます。また、元の位相  $\mathcal{T}$  の閉集合  $A$  は、任意の連続写像  $g$  に対し  $g^{-1}(A)$  が必ず閉集合になるため、自動的に  $k$ 閉集合です。したがって、常に  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_k$  ( $\mathcal{T}_k$  の方が開集合・閉集合が多く、位相が強い) が成り立ちます。

**必要十分条件の証明**：

コンパクト生成空間の定義は、「すべての  $k$ 閉集合が、元の位相  $\mathcal{T}$  においても閉集合である」ということです。これは「 $\mathcal{T}_k$  の閉集合  $\implies \mathcal{T}$  の閉集合」すなわち  $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{T}$  を意味します。

すでに  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_k$  は普遍的に成り立つことを示しているため、次の同値関係が得られます：

$$X \text{ がコンパクト生成} \iff \mathcal{T}_k \subset \mathcal{T} \iff \mathcal{T} = \mathcal{T}_k \iff X = kX$$



## 特徴付け ③：商空間としての特徴付け

### 【定理】

位相空間  $X$  がコンパクト生成空間であるための必要十分条件は、 $X$  が「コンパクトハウスドルフ空間たちの離散和」からの商空間として表せることである。

### 【特徴付け ③ の詳細な証明】

( $\implies$ ) の証明：

$X$  をコンパクト生成空間とします。 $X$  へのすべての連続写像  $g: K \rightarrow X$  (ただし  $K$  はコンパクトハウスドルフ空間) の全体を添字集合  $\mathcal{I} = \{(K_g, g)\}$  として集めます。

これらのドメインであるコンパクトハウスドルフ空間の離散和 (Disjoint union) 空間を  $H$  と定義します：

$$H = \coprod_{(K_g, g) \in \mathcal{I}} K_g$$

各成分からの自然な注入写像 (包含) を  $i_g: K_g \rightarrow H$  とします。ここで、全射写像  $p: H \rightarrow X$  を、各成分の上で  $p \circ i_g = g$  となるように一意に定義します。

- **$p$  の全射性**： $X$  の任意の点  $x \in X$  に対し、1点空間  $K_x = \{*\}$  (これはコンパクトハウスドルフ空間) から  $x$  への定値写像  $h_x: \{*\} \rightarrow X$  を考えると、これは  $\mathcal{I}$  の元です。したがって、 $x = h_x(*) = p(i_{h_x}(*))$  となり、 $x$  は

$p$  の像に含まれます。よって  $p$  は全射です。

- $p$  が商写像であることの確認：商位相の定義より、「 $X$  の部分集合  $A$  が閉集合  $\iff p^{-1}(A)$  が  $H$  の閉集合」を示します。

離散和の位相の定義から、 $H$  の部分集合  $p^{-1}(A)$  が閉集合であるための必要十分条件は、すべての成分への引き戻し  $i_g^{-1}(p^{-1}(A))$  が  $K_g$  の閉集合となることです。ここで、

$$i_g^{-1}(p^{-1}(A)) = (p \circ i_g)^{-1}(A) = g^{-1}(A)$$

ですから、次が成り立ちます：

$$p^{-1}(A) \text{ が } H \text{ の閉集合} \iff \text{任意の } g \in \mathcal{I} \text{ に対して } g^{-1}(A) \text{ が } K_g \text{ の閉集合}$$

この右辺の条件はまさに「 $A$  が  $k$ 閉集合である」という条件そのものです。いま  $X$  はコンパクト生成空間であると仮定しているので、これは「 $A$  が  $X$  の通常閉集合である」と同値です。

したがって、 $A \subset X$  が閉集合  $\iff p^{-1}(A) \subset H$  が閉集合となり、 $p$  は商写像です。すなわち、 $X$  はコンパクトハウスドルフ空間の離散和  $H$  からの商空間です。

( $\Leftarrow$ ) の証明：

ある商写像  $p : H \rightarrow X$  が存在し、その定義域が  $H = \coprod_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$  (各  $K_\lambda$  はコンパクトハウスドルフ空間) であると仮定します。このとき  $X$  がコンパクト生成空間であることを示します。

$X$  の  $k$ 閉集合  $A$  を任意に取ります。目標は  $A$  が  $X$  の通常閉集合であることを示すことです。 $p$  は商写像なので、商位相の定義より  $p^{-1}(A)$  が  $H$  の閉集合であることを示せば十分です。

離散和の位相の定義より、 $p^{-1}(A)$  が  $H$  の閉集合であることを示すには、任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対して、自然な包含  $i_\lambda : K_\lambda \rightarrow H$  による逆像  $i_\lambda^{-1}(p^{-1}(A))$  が  $K_\lambda$  の閉集合であることを示せばよいです。

ここで、合成写像  $p \circ i_\lambda : K_\lambda \rightarrow X$  を考えます。 $p$  も  $i_\lambda$  も連続なので、 $p \circ i_\lambda$  はコンパクトハウスドルフ空間  $K_\lambda$  から  $X$  への連続写像です (すなわち  $p \circ i_\lambda \in \mathcal{C}(X)$ ) 。

したがって、次の等式が成り立ちます：

$$i_\lambda^{-1}(p^{-1}(A)) = (p \circ i_\lambda)^{-1}(A)$$

いま  $A$  は  $X$  の  $k$ 閉集合であり、 $p \circ i_\lambda$  はコンパクトハウスドルフ空間からの連続写像なので、 $k$ 閉集合の定義より  $(p \circ i_\lambda)^{-1}(A)$  は  $K_\lambda$  の閉集合となります。

これがすべての  $\lambda \in \Lambda$  について成り立つため、 $H$  の離散和位相の定義から  $p^{-1}(A)$  は  $H$  の閉集合となります。そして  $p$  が商写像であることから、 $A$  は  $X$  の通常閉集合です。したがって、 $X$  はコンパクト生成空間です。

